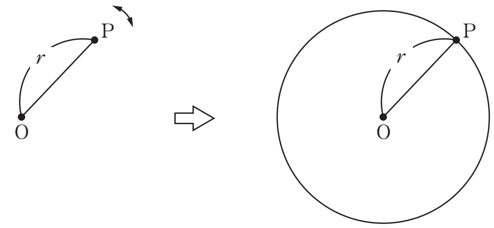
第７講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

要点①　軌跡の方程式

与えられた条件を満たす点全体の集合(図形)を，その条件を満たす点の「　　　」という。

例　平面上で，定点Ｏから一定の距離 r にある点Ｐの軌跡は，点Ｏを中心とする半径 r の円である。



与えられた条件を満たす点の軌跡を，座標を用いて求める。

例　2点 A(0, 3)，B(3, 0) に対して，条件 AP＝BP を満たす点Ｐの軌跡を求める。

点Ｐの座標を　　　　とする。

$$\mathrm{AP}=\sqrt{\qquad\qquad}=\sqrt{x^2+(y-3)^2}$$

$$\mathrm{BP}=\sqrt{\qquad\qquad}=\sqrt{(x-3)^2+y^2}$$

AP＝BP より AP　＝BP

よって　$x^2+(y-3)^2=(x-3)^2+y^2$

整理すると $x-y=0$

したがって，点Ｐは直線 $x-y=0$ 上にある。

逆に，直線 $x-y=0$ 上のすべての点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，ここまでのプロセスを逆にたどることにより，AP＝BP を満たす。

したがって，求める点Ｐの軌跡は

座標を用いて軌跡を求める手順は以下。

軌跡を求める手順

①　条件を満たす点Ｐの座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x，y の方程式で表す。

②　①で表した方程式から，その方程式が表す図形を求める。

③　②の図形上のすべての点Ｐが，与えられた条件を満たすことを確認する。

※③が明らかな場合は，その確認を省略することが多い。

【MEMO】

1　次の条件を満たす点Pの軌跡を求めよ。

(1)　2点 A(2, 5)，B(6, 3) から等距離にある点P

(2)　2点 A(1, 1)，B(4, 7) からの距離の比が 1：2 である点P

Point Pickup

点Pの軌跡を求める手順

①　点Pの座標を (x, y) とし，与えられた条件を x，y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

②　①の図形上のすべての点Pが，与えられた条件を満たすことを確認する。

※②について，①を逆にたどることにより条件を満たすことが明らかな場合は，②の記述を省略することが多い。

第 7 講　PART1 確認問題

1　2 点 A(1, 3), B(4, 1) から等距離にある点 P の軌跡は

直線 [ア]$x-$[イ]$y-$[ウ]$=0$

である。

2　2 点 A(1, −3), B(−7, 5) からの距離の比が 1 : 3 である点 P の軌跡は

中心 ([エ], [オカ]), 半径 [キ]$\sqrt{\text{[ク]}}$ の円

である。

第 7 講　軌跡と領域

PART1　軌跡の方程式

1　次の条件を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(1)　2 点 A$(2,\ 5)$，B$(6,\ 3)$ から等距離にある点 P

(2)　2 点 A$(1,\ 1)$，B$(4,\ 7)$ からの距離の比が $1:2$ である点 P

[解答]

(1)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$

よって　$(x-2)^2+(y-5)^2=(x-6)^2+(y-3)^2$

整理すると　$2x-y-4=0$

よって，点 P は直線 $2x-y-4=0$ 上にある。

逆に，この直線上のすべての点 P は，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は 直線 $2x-y-4=0$

(2)　点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:2$　より　$\mathrm{BP}=2\mathrm{AP}$　つまり　$\mathrm{BP}^2=4\mathrm{AP}^2$

よって　$(x-4)^2+(y-7)^2=4\left\{(x-1)^2+(y-1)^2\right\}$

整理すると　$x^2+y^2+2y-19=0$

すなわち　$x^2+(y+1)^2=20$

よって，点 P は円 $x^2+(y+1)^2=20$ 上にある。

逆に，この円上のすべての点 P は，条件を満たす。

したがって，求める点 P の軌跡は 中心 $(0,\ -1)$，半径 $2\sqrt{5}$ の円

第 7 講　PART1 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：6，イ：4，ウ：7

[解説]

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

$\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ より，両辺を 2 乗すると $\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$ であるから

$$(x-1)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(y-1)^2$$

$$x^2-2x+1+y^2-6y+9$$
$$=x^2-8x+16+y^2-2y+1$$

$$6x-4y-7=0$$

よって，点 P は直線 $6x-4y-7=0$ 上にある。 [A]

逆に，この直線上のすべての点は，条件 $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ を満たす。 [A]

したがって，求める点 P の軌跡は

直線 $6x-4y-7=0$

［A］　点 P の軌跡を求める手順

① 点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を $x,\ y$ の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確認する。

2 **[正解]** **エ**：2，**オカ**：-4，**キ**：3，**ク**：2

[解説]

点 P の座標を $(x,\ y)$ とする。

AP：BP＝1：3 より BP＝3AP

両辺を 2 乗すると　$BP^2 = 9AP^2$

よって

$$(x+7)^2+(y-5)^2=9\{(x-1)^2+(y+3)^2\}$$

$$x^2+14x+49+y^2-10y+25$$

$$=9(x^2-2x+1+y^2+6y+9)$$

$$8x^2-32x+8y^2+64y+16=0$$

$$x^2-4x+y^2+8y+2=0$$

すなわち　$(x-2)^2+(y+4)^2=18$

よって，点 P は円 $(x-2)^2+(y+4)^2=18$ 上にある。

[B]

逆に，この円上のすべての点は，条件を満たす。

[B]

したがって，求める点 P の軌跡は

中心 $(2,\ -4)$，半径 $3\sqrt{2}$ の円

[B]　点 P の軌跡を求める手順

① 点 P の座標を $(x,\ y)$ とし，与えられた条件を x, y の方程式で表し，その方程式が表す図形を求める。

② ①の図形上のすべての点 P が，与えられた条件を満たすことを確認する。